

九师联盟 3 月在线公益联考·高三数学(理科)

参考答案、提示及评分细则

1. B $\because U=\mathbf{R}, M=\left\{\frac{1}{x}<1\right\}=\{x|x<0 \text{ 或 } x>1\}, \therefore \complement_U M=\{x|0\leq x\leq 1\}$. 故选 B.
2. C $\because \frac{z}{3+i}=1-i, \therefore z=(3+i)(1-i)=3-3i+i-i^2=3-2i-(-1)=4-2i, \therefore \bar{z}=4+2i, \therefore |\bar{z}|=\sqrt{4^2+2^2}=2\sqrt{5}$. 故选 C.
3. A $\because y$ 与 x 具有线性相关关系, 且满足回归方程 $\hat{y}=12x+60$, 该自由职业者平均每天工作的时间为 $x=5$ 小时, \therefore 可以估计该自由职业者年收入为 $\hat{y}=12\times 5+60=120$ 千元. 故选 A.
4. A 由题知, $f(x)$ 的定义域为 $(-\infty, 0) \cup (0, +\infty)$, 且 $f(-x)=\frac{(e^{-x}-e^x)\sin(-x)}{-x}=-\frac{(e^x-e^{-x})\sin x}{x}, \therefore f(-x)=-f(x), \therefore f(x)$ 是奇函数, 排除 C 和 D; 将 $x=\pi$ 代入 $f(x)$ 得 $f(\pi)=\frac{(e^\pi-e^{-\pi})\sin \pi}{\pi}=0$, 排除 B. 故选 A.
5. B 由题意, 若甲承担仰泳, 则乙运动员有 $A_2^2=2$ 种安排方法, 其他两名运动员有 $A_2^2=2$ 种安排方法, 共计 $2\times 2=4$ 种方法; 若甲承担自由泳, 则乙运动员有 $A_2^2=2$ 种安排方法, 其他两名运动员有 $A_2^2=2$ 种安排方法, 共计 $2\times 2=4$ 种方法, 所以中国队参赛共有 $4+4=8$ 种不同的安排方法. 故选 B.
6. D 从十部书中随机选择两部书共有 $\frac{9(9+1)}{2}$ 种方法, 其中选择的两部书中含有《九章算术》的方法为 9 种, 所以所求的概率 $p=\frac{9}{\frac{9(9+1)}{2}}=\frac{1}{5}$. 故选 D.
7. B $s=0, k=2; s=0+2\times 2=4, k=4; s=4+2\times 4=12, k=6; s=12+2\times 6=24, k=8; s=24+2\times 8=40, k=10$, 此时刚好不满足条件“ $s<38$ ”, 循环结束, 输出 k 的值为 10. 故选 B.
8. C 由 $\overrightarrow{AE}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BE}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}, \overrightarrow{AF}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{DF}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$, 所以 $\overrightarrow{AE}\cdot\overrightarrow{AF}=(\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD})\cdot(\overrightarrow{AD}+\frac{1}{2}\overrightarrow{AB})=\frac{1}{2}\overrightarrow{AB}^2+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}^2+\frac{7}{6}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AD}=1$. 故选 C.
9. D 将函数 $f(x)=2\sin(3x+\varphi)$ ($0<\varphi<\pi$) 图象向右平移 $\frac{\pi}{8}$ 个单位长度后, 得到函数解析式为 $y=2\sin\left[3\left(x-\frac{\pi}{8}\right)+\varphi\right]=2\sin\left(3x-\frac{3\pi}{8}+\varphi\right)$, 由题意, 图象关于直线 $x=\frac{\pi}{3}$ 对称, 则 $3\times\frac{\pi}{3}-\frac{3\pi}{8}+\varphi=k\pi+\frac{\pi}{2}$ ($k\in\mathbf{Z}$), 得 $\varphi=k\pi-\frac{\pi}{8}$ ($k\in\mathbf{Z}$). 又 $0<\varphi<\pi$, 所以 $\varphi=\frac{7\pi}{8}$. 所以 $f(x)=2\sin\left(3x+\frac{7\pi}{8}\right)$, 当 $x\in\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 时, $3x+\frac{7\pi}{8}\in\left[\frac{\pi}{2}, \frac{5\pi}{4}\right]$, 则 $\sin\left(3x+\frac{7\pi}{8}\right)\in\left[-\frac{\sqrt{2}}{2}, 1\right]$, 所以 $2\sin\left(3x+\frac{7\pi}{8}\right)\in[-\sqrt{2}, 2]$. 故函数 $f(x)$ 在 $\left[-\frac{\pi}{8}, \frac{\pi}{8}\right]$ 上的值域是 $[-\sqrt{2}, 2]$. 故选 D.
10. A 设球 O 的半径为 R , 球心 O 到平面 ABC 的距离为 d , 由 O 是 CD 的中点得 $V_{D-ABC}=2V_{O-ABC}=\frac{2}{3}\times\frac{1}{2}\times 2^2\times\frac{\sqrt{3}}{2}d=2$, 解得 $d=\sqrt{3}$, 所以 $R^2=(\sqrt{3})^2+\left(\frac{2\sqrt{3}}{3}\right)^2=\frac{13}{3}$, 所以球 O 的表面积为 $4\pi R^2=\frac{52\pi}{3}$. 故选 A.
11. C 不妨设 P 为双曲线 C 右支上一点, 又 \because 点 P 在以线段 F_1F_2 为直径的圆上, $\therefore \angle F_1PF_2=90^\circ$. 又 $\because 2\angle PF_1F_2=$

$\angle PF_2F_1, \therefore \angle PF_1F_2 = 30^\circ, \therefore |PF_2| = \frac{1}{2}|F_1F_2| = c, \therefore |PF_1| = 2a + c$. 又 $\therefore |PF_1|^2 + |PF_2|^2 = |F_1F_2|^2, \therefore (2a+c)^2 + c^2 = (2c)^2, \therefore c^2 - 2ac - 2a^2 = 0, \therefore \frac{c}{a} = 1 - \sqrt{3}$ (舍) 或 $\frac{c}{a} = 1 + \sqrt{3}$. 故选 C.

12. D 由题意, 可得当 $x \in [0, 1)$ 时, $1 \leq f(x) \leq \frac{5}{4}$; $x \in [1, 2)$ 时, $\frac{\sqrt{2}}{2} \leq f(x) \leq 1, \therefore$ 当 $x \in [0, 2)$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{4}$. 又由 $f(x+2) = \frac{1}{2}f(x), \therefore$ 当 $x \in [2, 4)$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{4} \times \frac{1}{2}$; 当 $x \in [4, 6)$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $\frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2, \dots, \therefore$ 当 $x \in [2n-2, 2n)$ 时, $f(x)$ 的最大值为 $a_n = \frac{5}{4} \times \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$, 由等比数列的前 n 项和公式, 得 $S_n = \frac{\frac{5}{4} \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^n\right]}{1 - \frac{1}{2}} = \frac{5}{2} - 5 \left(\frac{1}{2}\right)^{n+1}$. 故选 D.

13. 0.022 8 据题设知, $P(2019-2 \times 2 < X \leq 2019+2 \times 2) = 0.9544$, 即 $P(2015 < X \leq 2023) = 0.9544$, 所以 $P(X > 2023) = \frac{1}{2}[1 - P(2015 < X \leq 2023)] = \frac{1}{2} \times (1 - 0.9544) = 0.0228$.

14. n^2 设等差数列 $\{a_n\}$ 的公差为 $d (d \neq 0)$, 则 $S_1 = 9 - 4d, S_2 = 18 - 7d, S_4 = 36 - 10d, \therefore S_2^2 = S_1 \cdot S_4$, 所以 $(18 - 7d)^2 = (9 - 4d)(36 - 10d)$, 整理得 $9d^2 - 18d = 0, \therefore d \neq 0, \therefore d = 2, \therefore a_5 = a_1 + 4d = 9$, 则 $a_1 = 1, \therefore S_n = na_1 + \frac{n(n-1)}{2}d = n^2$.

15. $5 + \sqrt{17}$ 由题意得 $F(0, 2)$, 准线方程为 $y = -2$, 过点 M 作准线的垂线垂足为 N , 由抛物线的定义得 $|PF| + |PM| = |PN| + |PM|$, 故当 P, N, M 三点共线时, $|PN| + |PM|$ 取得最小值, 且 $|PN| + |PM|$ 的最小值为 $|MN| = 3 - (-2) = 5$. 而 $|MF| = \sqrt{(3-0)^2 + (-2-2)^2} = \sqrt{17}$, 故 $\triangle PMF$ 周长的最小值是 $5 + \sqrt{17}$.

16. $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$ 因为 $(e^x + 2x)' = e^x + 2$, 所以曲线 $y = e^x + 2x$ 上的任意一点 (x_1, y_1) 处的切线 l_1 的斜率 $k_1 = e^{x_1} + 2$. 同理可得曲线 $y = ax + \cos x$ 上的任意一点 (x_2, y_2) 处的切线 l_2 的斜率 $k_2 = a - \sin x_2 \in [a-1, a+1]$. 由于 $l_1 \perp l_2$, 所以 $k_1 \cdot k_2 = -1$, 所以 $a - \sin x_2 = -\frac{1}{e^{x_1} + 2}$. 又因为 $-\frac{1}{e^{x_1} + 2} \in \left(-\frac{1}{2}, 0\right)$, 所以 $\left(-\frac{1}{2}, 0\right) \subseteq [a-1, a+1]$, 则 $\begin{cases} a-1 \leq -\frac{1}{2}, \\ a+1 \geq 0, \end{cases}$ 解得 $-1 \leq a \leq \frac{1}{2}$, 所以实数 a 的取值范围是 $\left[-1, \frac{1}{2}\right]$.

17. 解: (1) 由正弦定理得 $\frac{a-b+c}{c} = \frac{b}{a+b-c}$,
 化简得 $b^2 + c^2 - a^2 = bc$ 2分
 由余弦定理得 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{bc}{2bc} = \frac{1}{2}$ 4分
 又因为 $0 < A < \pi$, 所以 $A = \frac{\pi}{3}$ 6分
 (2) 由正弦定理得 $\frac{a}{\sin A} = 2R$, 则 $a = 2R \sin A = 4 \sin \frac{\pi}{3} = 2\sqrt{3}$, 8分
 由余弦定理得 $a^2 = 12 = b^2 + c^2 - 2bc \cos A \geq 2bc - bc = bc$,
 即 $bc \leq 12$ (当且仅当 $b=c$ 时取等号), 10分
 故 $S = \frac{1}{2}bc \sin A \leq \frac{1}{2} \times 12 \times \frac{\sqrt{3}}{2} = 3\sqrt{3}$ (当且仅当 $b=c$ 时取等号). 11分

即 $\triangle ABC$ 面积 S 的最大值为 $3\sqrt{3}$ 12分

18. 解:(1)由题意,得 $(a+b+c+0.018+0.022+0.025)\times 10=1$, 1分

而 a, b, c 构成以2为公比的等比数列,

所以 $(a+2a+4a+0.018+0.022+0.025)\times 10=1$,解得 $a=0.005$ 3分

则 $b=0.010, c=0.020$ 4分

(2)获得“优秀作文”的人数为 $400\times 0.005\times 10=20$,

因为文科生与理科生人数之比为1:4,所以文科生与理科生人数分别为80,320.

故完成 2×2 列联表如下:

	文科生	理科生	合计
获奖	6	14	20
不获奖	74	306	380
合计	80	320	400

..... 5分

由表中数据可得: $K^2 = \frac{400 \times (6 \times 306 - 14 \times 74)^2}{20 \times 380 \times 80 \times 320} \approx 1.316 < 6.635$, 6分

所以不能在犯错误的概率不超过0.01的情况下认为“获得优秀作文”与学生的文理科有关. 7分

(3)由表中数据可知,抽到获得“优秀作文”学生的概率为 $0.005\times 10=0.05$, 8分

将频率视为概率,所以 X 可取0,1,2,且 $X\sim B(2, 0.05)$, 9分

则 $P(X=k) = C_2^k \left(\frac{1}{20}\right)^k \left(1-\frac{1}{20}\right)^{2-k} (k=0,1,2)$ 10分

故 X 的分布列为

X	0	1	2
P	$\frac{361}{400}$	$\frac{38}{400}$	$\frac{1}{400}$

..... 11分

故 X 的期望为 $E(X) = 0 \times \frac{361}{400} + 1 \times \frac{38}{400} + 2 \times \frac{1}{400} = \frac{1}{10}$. (或 $E(X) = 2 \times 0.05 = 0.1$) 12分

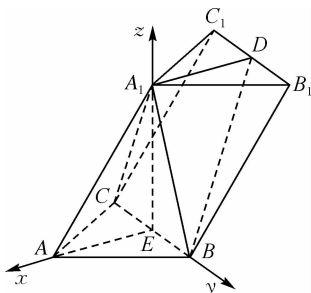
19. 证明:(1) $\because AB=AC, E$ 为 BC 的中点,

$\therefore AE \perp BC$ 1分

又 $\because A_1E \perp$ 平面 ABC ,

$\therefore AE, A_1E, BC$ 两两相互垂直.

以 AE, BC, A_1E 分别为 x 轴, y 轴, z 轴建立空间直角坐标系如图所示,



..... 3分

又 $AB=AC=3, \angle BAC=90^\circ, A_1A=4,$

$\therefore BC = \sqrt{3^2+3^2} = 3\sqrt{2}, AE = BE = \frac{1}{2}BC = \frac{3\sqrt{2}}{2}, A_1E = \sqrt{4^2 - \left(\frac{3\sqrt{2}}{2}\right)^2} = \frac{\sqrt{46}}{2}, \therefore A_1\left(0, 0, \frac{\sqrt{46}}{2}\right), B\left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, 0\right),$

$D\left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, \frac{\sqrt{46}}{2}\right), \therefore \vec{A_1D} = \left(-\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \vec{A_1B} = \left(0, \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{\sqrt{46}}{2}\right), \dots\dots\dots 5 \text{分}$

$\therefore \vec{A_1D} \cdot \vec{A_1B} = -\frac{3\sqrt{2}}{2} \times 0 + 0 \times \frac{3\sqrt{2}}{2} + 0 \times \left(-\frac{\sqrt{46}}{2}\right) = 0. \dots\dots\dots 6 \text{分}$

又 $\therefore \vec{A_1D} \neq \mathbf{0}, \vec{A_1B} \neq \mathbf{0},$

$\therefore \vec{A_1D} \perp \vec{A_1B},$ 即 $A_1D \perp A_1B. \dots\dots\dots 8 \text{分}$

解:(2) 设平面 A_1BD 的一个法向量 $\mathbf{m} = (x_1, y_1, z_1),$ 则 $\begin{cases} -\frac{3\sqrt{2}}{2}x_1 + 0 \times y_1 + 0 \times z_1 = 0, \\ 0 \times x_1 + \frac{3\sqrt{2}}{2} \times y_1 - \frac{\sqrt{46}}{2}z_1 = 0. \end{cases}$

令 $y_1 = \sqrt{46},$ 则 $x_1 = 0, z_1 = 3\sqrt{2},$

$\therefore \mathbf{m} = (0, \sqrt{46}, 3\sqrt{2}). \dots\dots\dots 9 \text{分}$

据题设分析知, $AE \perp$ 平面 $A_1BC,$

\therefore 平面 A_1BC 的一个法向量 $\mathbf{n} = (1, 0, 0). \dots\dots\dots 10 \text{分}$

$\therefore \cos \langle \mathbf{m}, \mathbf{n} \rangle = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{n}}{|\mathbf{m}| |\mathbf{n}|} = \frac{(0, \sqrt{46}, 3\sqrt{2}) \cdot (1, 0, 0)}{\sqrt{0^2 + (\sqrt{46})^2 + (3\sqrt{2})^2} \cdot \sqrt{1^2 + 0^2 + 0^2}} = 0, \dots\dots\dots 11 \text{分}$

\therefore 二面角 $C-A_1B-D$ 的正弦值为 1. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

20. 解:(1) 据题设知, 点 $(0, b)$ 在直线 $m: x-y+1=0$ 上, 得 $b=1. \dots\dots\dots 1 \text{分}$

又因为 $\frac{c}{a} = \frac{\sqrt{3}}{2}, b^2 + c^2 = a^2, a > 0, \dots\dots\dots 2 \text{分}$

所以 $a=2, c=\sqrt{3}, \dots\dots\dots 3 \text{分}$

所以所求椭圆 C 的标准方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1. \dots\dots\dots 4 \text{分}$

证明:(2) 设 $P(x_0, y_0), A(-1, t), B(-1, -t),$ 则有 $x_0^2 + 4y_0^2 - 4 = 0. \dots\dots\dots 5 \text{分}$

直线 AP 的方程为 $y-t = \frac{t-y_0}{-1-x_0}(x+1).$ 令 $x=-4,$ 整理得 $y = \frac{(4+x_0)t-3y_0}{1+x_0}. \dots\dots\dots 7 \text{分}$

同理可得点 R 纵坐标 $y = \frac{-3y_0-(4+x_0)t}{1+x_0}, \dots\dots\dots 8 \text{分}$

所以点 Q, R 的纵坐标之积 $y_Q \cdot y_R = \frac{(4+x_0)t-3y_0}{1+x_0} \cdot \frac{-3y_0-(4+x_0)t}{1+x_0}$
 $= \frac{9y_0^2 - (4+x_0)^2 t^2}{(1+x_0)^2}. \dots\dots\dots 9 \text{分}$

又因为 $y_0^2 = 1 - \frac{1}{4}x_0^2, t^2 = \frac{3}{4},$

所以 $y_Q \cdot y_R = \frac{9\left(1 - \frac{1}{4}x_0^2\right) - \frac{3}{4}(4+x_0)^2}{(1+x_0)^2} = \frac{-3(1+x_0)^2}{(1+x_0)^2} = -3, \dots\dots\dots 11 \text{分}$

所以 $\vec{OQ} \cdot \vec{OR} = (-4, y_Q) \cdot (-4, y_R) = 16 + y_Q \cdot y_R = 13,$ 即 $\vec{OQ} \cdot \vec{OR}$ (O 为坐标原点) 为定值. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

21. 解:(1)当 $a=-2$ 时, $f(x)=e^{-x}+2x$,

$$\therefore f'(x) = -e^{-x} + 2 = \frac{2(e^x - \frac{1}{2})}{e^x}. \dots\dots\dots 1 \text{分}$$

$$\text{令 } f'(x) = 0, \text{ 则 } \frac{2(e^x - \frac{1}{2})}{e^x} = 0,$$

$$\therefore x = \ln \frac{1}{2}. \dots\dots\dots 2 \text{分}$$

分析知,当 $x < \ln \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) < 0$;

当 $x > \ln \frac{1}{2}$ 时, $f'(x) > 0$,

\therefore 函数 $f(x)$ 在区间 $(-\infty, \ln \frac{1}{2})$ 上单调递减, 在区间 $(\ln \frac{1}{2}, +\infty)$ 上单调递增, $\dots\dots\dots 4 \text{分}$

\therefore 当 $a=-2$ 时, $f(x)$ 的极小值 $f(\ln \frac{1}{2}) = e^{-\ln \frac{1}{2}} + 2\ln \frac{1}{2} = 2 - 2\ln 2$, 不存在极大值. $\dots\dots\dots 6 \text{分}$

$$(2) \because f(x) = e^{-x} - ax,$$

$$\therefore f(-x) = e^x + ax.$$

又 $\because \ln [e(x+1)] \geq 2 - f(-x)$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 成立,

$\therefore \ln [e(x+1)] \geq 2 - e^x - ax$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 成立.

即 $e^x + ax + \ln(x+1) - 1 \geq 0$ 对任意的 $x \in [0, +\infty)$ 成立. $\dots\dots\dots 7 \text{分}$

引入函数 $G(x) = e^x + ax + \ln(x+1) - 1 (x \geq 0)$,

$$\therefore G'(x) = e^x + a + \frac{1}{x+1}.$$

$$\text{令 } G'(x) = 0, \text{ 则 } e^x + a + \frac{1}{x+1} = 0. \dots\dots\dots 8 \text{分}$$

引入函数 $p(x) = e^x + \frac{1}{x+1} (x \geq 0)$,

$$\therefore p'(x) = e^x - \frac{1}{(x+1)^2},$$

\therefore 当 $x \geq 0$ 时, $p'(x) \geq 0$,

\therefore 函数 $p(x)$ 在区间 $[0, +\infty)$ 上单调递增.

\therefore 当 $x=0$ 时, $p(x)_{\min} = p(0) = 2$. $\dots\dots\dots 9 \text{分}$

讨论:

当 $-a \leq 2$, 即 $a \geq -2$ 时, $G'(x) \geq 0$, 此时函数 $G(x)$ 在 $[0, +\infty)$ 上单调递增,

$$\therefore e^0 + a \times 0 + \ln(0+1) - 1 \geq 0,$$

$\therefore a \geq -2$, 满足题设; $\dots\dots\dots 10 \text{分}$

当 $-a > 2$, 即 $a < -2$ 时, 存在唯一实数 x_0 使 $G'(x_0) = 0$, 且分析知, 当 $0 \leq x < x_0$ 时, $G'(x) < 0$; 当 $x > x_0$ 时, $G'(x) > 0$,

\therefore 函数 $G(x)$ 在区间 $[0, x_0)$ 上单调递减.

$$\text{又 } \because G(0) = 0,$$

\therefore 当 $0 < x < x_0$ 时, $G(x) < 0$, 不满足题设. $\dots\dots\dots 11 \text{分}$

综上, 所求实数 a 的取值范围是 $[-2, +\infty)$. $\dots\dots\dots 12 \text{分}$

22. 解: (1) $\therefore \begin{cases} x=2\cos\theta, \\ y=\sin\theta, \end{cases}$

$\therefore \left(\frac{x}{2}\right)^2 + y^2 = \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1,$

即曲线 C 的普通方程为 $\frac{x^2}{4} + y^2 = 1,$ 2 分

\therefore 曲线 C 的极坐标方程为 $\frac{(\rho\cos\theta)^2}{4} + (\rho\sin\theta)^2 = 1,$ 即 $\rho = \frac{2}{\sqrt{1+3\sin^2\theta}}.$ 4 分

(2) 直线 l 的普通方程为 $y=x.$ 5 分

解 $\begin{cases} \frac{x^2}{4} + y^2 = 1, \\ y = x, \end{cases}$ 得 $\begin{cases} x = \frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ y = \frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases}$ 或 $\begin{cases} x = -\frac{2\sqrt{5}}{5}, \\ y = -\frac{2\sqrt{5}}{5} \end{cases},$ 8 分

\therefore 直线 l 被曲线 C 截得线段的长 $d = \sqrt{\left[\frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right]^2 + \left[\frac{2\sqrt{5}}{5} - \left(-\frac{2\sqrt{5}}{5}\right)\right]^2} = \frac{4\sqrt{10}}{5}.$ 10 分

23. 解: (1) 因为 $(x^2 + y^2 + z^2)[1^2 + (-2)^2 + 1^2] \geq (x - 2y + z)^2,$ 当且仅当 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ 时等号成立, 2 分

即 $6(x^2 + y^2 + z^2) \geq (x - 2y + z)^2,$ 当且仅当 $\frac{x}{1} = \frac{y}{-2} = \frac{z}{1}$ 时等号成立. 3 分

又因为 $x - 2y + z = 4,$

所以 $x^2 + y^2 + z^2 \geq \frac{8}{3},$ 当且仅当 $x = \frac{2}{3}, y = -\frac{4}{3}, z = \frac{2}{3}$ 时等号成立.

即 $x^2 + y^2 + z^2$ 的最小值为 $\frac{8}{3}.$ 5 分

(2) 因为 $x - 2y + z = 4, y = x + z,$

所以 $x - 2(x + z) + z = 4,$

所以 $x + z = -4.$ 7 分

又因为 $xz \leq \left(\frac{x+z}{2}\right)^2,$ 8 分

所以 $xz \leq 4,$ 即 $(xz)_{\max} = 4$ 10 分