

漳州市 2021 届高三毕业班第二次教学质量检测

数学试题

本试卷共 5 页。满分 150 分。

考生注意：

1. 答题前，考生务必在试题卷、答题卡规定的地方填写自己的准考证号、姓名。考生要认真核对答题卡上粘贴的条形码的“准考证号、姓名”与考生本人准考证号、姓名是否一致。

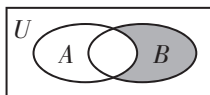
2. 回答选择题时，选出每小题答案后，用铅笔把答题卡上对应题目的答案标号涂黑。如需改动，用橡皮擦干净后，再选涂其它答案标号。回答非选择题时，将答案写在答题卡上。写在本试卷上无效。

3. 考试结束，考生必须将试题卷和答题卡一并交回。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. 设全集 $U = \mathbf{R}$ ，若集合 $A = \{x \mid 0 \leq x \leq 2\}$ ， $B = \{x \mid y = \sqrt{x-1}\}$ ，

则如图所示的阴影部分表示的集合为

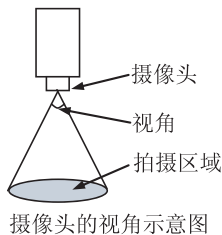


A. $(-\infty, 0)$ B. $[1, 2]$ C. $[1, +\infty)$ D. $(2, +\infty)$

2. 若 $(3+i)(2+xi) = y$ ，其中 $x, y \in \mathbf{R}$ ，则复数 $x+yi$ 在复平面内对应的点位于

A. 第一象限 B. 第二象限 C. 第三象限 D. 第四象限

3. 纳斯卡线条是一种巨型的地上绘图，有着广大宽阔的直线，看起来就像机场跑道一样，描绘的大多是动植物，位于南美洲西部的秘鲁南部的纳斯卡荒原上，是存在了 2000 年的谜局：究竟是谁创造了它们并且为了什么而创造，至今仍无人能解，因此被列入“十大谜团”。在这些图案中，最清晰的图案之一是一只身长 50 米的大蜘蛛（如图），据说这是一种学名为“节腹目”的蜘蛛的形状。这种蜘蛛十分罕见，只有亚马逊河雨林中最偏远隐秘的地区才能找到。现用视角为 30° 的摄像头（注：当摄像头和所拍摄的圆形区域构成一个圆锥时，该圆锥的轴截面的顶角称为该摄像头的视角）在该蜘蛛的上方拍摄，使得整个蜘蛛图案落在边长为 50 米的正方形区域内，则该摄像头距地面的高度的最小值是

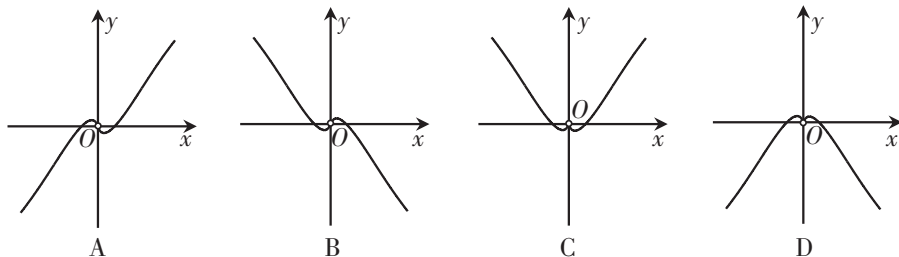


摄像头的视角示意图

A. 50 米 B. $25(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$ 米

C. $50(2 + \sqrt{3})$ 米 D. $50(2\sqrt{2} + \sqrt{6})$ 米

4. 函数 $f(x) = x \ln |x| + \sin x$ 的部分图象大致为



5. 已知实数 x, y 满足 $x^2 + 3y^2 = 3$, 则 $x + y$ 的最大值为

- A. 1 B. $\sqrt{3}$ C. 2 D. 4

6. 某校甲、乙、丙三位同学报名参加 A, B, C, D 四所高校的强基计划考试, 每所高校报名人数不限, 因为四所高校的考试时间相同, 所以甲、乙、丙只能随机各自报考其中一所高校, 则恰有两人报考同一所高校的概率为

- A. $\frac{1}{4}$ B. $\frac{9}{32}$ C. $\frac{4}{9}$ D. $\frac{9}{16}$

7. 已知直角梯形 $ABCD$ 中, $AB \parallel DC$, $\angle ABC = 90^\circ$, P 是边 BC 上一点 (不包括 B, C 两点). 若 $|\overrightarrow{AB}| = 2$, $|\overrightarrow{BC}| = 4$, 且 $|\overrightarrow{CD}| = |\overrightarrow{AB}| + |\overrightarrow{BP}|$, 则 $\overrightarrow{PA} \cdot \overrightarrow{PD}$ 的最小值为

- A. 0 B. 2 C. 3 D. 4

8. 已知函数 $f(x) = \frac{4}{e^x + 1}$, 则下列结论错误的是

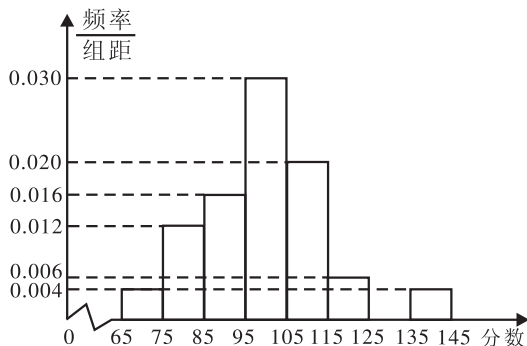
- A. 函数 $f(x)$ 的值域为 $(0, 4)$
 B. 函数 $f(x)$ 的图象关于点 $(0, 2)$ 对称
 C. 函数 $g(x) = f(x) - |x|$ 有且只有 2 个零点
 D. 曲线 $y = f(x)$ 的切线斜率的最大值为 -1

二、多项选择题: 本大题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分, 在每小题给出的四个选项中, 有多个选项符合题目要求, 全部选对的得 5 分, 选对但不全的得 2 分, 有选错的得 0 分.

9. 设 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 的对边分别为 a, b, c , 若 $a = 2\sqrt{2}$, $b = \sqrt{2}$, 则角 B 可以是

- A. 15° B. 30° C. 45° D. 75°

10. 在第一次全市高三年级统考后, 某数学老师为了解本班学生的本次数学考试情况, 将全班 50 名学生的数学成绩绘制成频率分布直方图. 已知该班级学生的数学成绩全部介于 65 分到 145 分之间(满分 150 分), 将数学成绩按如下方式分成八组: 第一组 $[65, 75)$, 第二组 $[75, 85)$, \dots , 第八组 $[135, 145]$, 按上述分组方法得到的频率分布直方图的一部分, 如图所示, 则下列结论正确的是



- A. 第七组的频率为 0.008
 B. 该班级数学成绩的中位数的估计值为 101 分
 C. 该班级数学成绩的平均分的估计值大于 95 分
 D. 该班级数学成绩的方差的估计值大于 26
11. 已知正三棱柱 $ABC - A_1B_1C_1$ 中, $AB = 2$, $AA_1 = 1$, M 为 AB 的中点, 点 P 在线段 BC_1 上, 则下列结论正确的是
- A. 直线 $BC_1 \parallel$ 平面 A_1MC
 B. A 和 P 到平面 A_1MC 的距离相等
 C. 存在点 P , 使得 $AP \perp$ 平面 A_1MC
 D. 存在点 P , 使得 $AP \perp A_1C$
12. 已知 F 为抛物线 $C: y^2 = 2px (p > 0)$ 的焦点, K 为 C 的准线与 x 轴的交点, 点 P 在抛物线 C 上, 设 $\angle KPF = \alpha$, $\angle PKF = \beta$, $\angle PFK = \theta$, 则下列结论正确的是
- A. 抛物线 C 在点 $(\frac{p}{2}, p)$ 处的切线过点 K
 B. β 的最大值为 $\frac{\pi}{3}$
 C. $\tan \beta = \sin \theta$
 D. 存在点 P , 使得 $\alpha = \frac{3}{2}\beta$

三、填空题: 本题共 4 小题, 每小题 5 分, 共 20 分.

13. 写出一个离心率为 2 的双曲线方程: _____.
14. 已知 $(x + 1)^6 = a_0 + a_1(x - 1) + a_2(x - 1)^2 + \dots + a_6(x - 1)^6$, 则 $a_4 =$ _____.
15. 已知 $\omega > 0$, $\varphi > 0$, 函数 $f(x) = 2\cos(3x + \frac{\pi}{3}) + 1$ 的图象向右平移 φ 个单位得到 $g(x)$ 的图象, 若函数 $g(x)$ 与函数 $h(x) = 4\sin(\omega x - \frac{\pi}{6})$ 的极值点完全相同, 则 $\omega =$ _____, φ 的最小值为 _____.(第一空 2 分, 第二空 3 分)
16. 已知正方体 $ABCD - A_1B_1C_1D_1$ 的棱长为 4, 点 P 在平面 A_1BCD_1 内, 且 $PA = 3PB$, 则点 P 的轨迹的长度为 _____.

四、解答题：本题共 6 小题，共 70 分。解答应写出文字说明、证明过程或演算步骤。

17. (10 分)

已知数列 $\{a_n\}$ 的前 n 项和为 S_n ，且满足 $a_1 = 1$ ， $S_{n+1} - 3S_n = 1$ 。

(1) 求 $\{a_n\}$ 的通项公式；

(2) 若 $b_n = \log_3 a_n + 1$ ，求数列 $\left\{ \frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} \right\}$ 的前 n 项和 T_n 。

18. (12 分)

已知 $\triangle ABC$ 的内角 A, B, C 所对的边分别为 a, b, c ，且满足

$$2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - \cos 2C.$$

(1) 求角 A ；

(2) 设点 D 在边 BC 上，且 $AD = 2$ ，

证明：若 _____，则 $b + c$ 存在最大值或最小值。

请在下面的两个条件中选择一个条件填到上面的横线上，并证明。

① AD 是 $\triangle ABC$ 的中线；

② AD 是 $\triangle ABC$ 的角平分线。

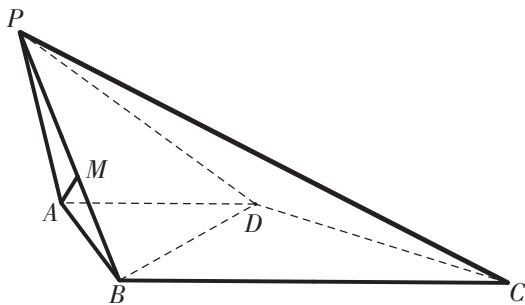
19. (12 分)

如图，在四棱锥 $P-ABCD$ 中，侧面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$ ，底面 $ABCD$ 是直角梯形， $AD \parallel BC$ ， $AB \perp BC$ ， $\angle PAB = 120^\circ$ ， $PA = AD = AB = 1$ ， $BC = 2$ 。

(1) 证明：平面 $PBC \perp$ 平面 PAB ；

(2) 在线段 PB 上是否存在点 M ，使得直线 AM 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$ ？若存在，

求出线段 PM 的长度；若不存在，请说明理由。



20. (12分)

已知左、右焦点分别为 F_1 、 F_2 的椭圆 $C: \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 (a > b > 0)$ 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 以 F_1F_2 为直径的圆过 C 的下顶点 A .

(1) 求椭圆 C 的方程;

(2) 若过点 $P(0, 1)$ 的直线 l 与椭圆 C 相交于 M, N 两点, 且直线 AM, AN 的斜率分别为 k_1, k_2 , 证明: $k_1 \cdot k_2$ 为定值.

21. (12分)

某种玩具启动后, 该玩具上的 LED 灯会亮起红灯或绿灯 (红灯和绿灯不会同时亮起), 第 1 次亮灯时, 亮起红灯的概率为 P_1 , 亮起绿灯的概率为 $1 - P_1$. 若第 n 次亮起的是红灯, 则第 $n + 1$ 次亮起红灯的概率为 $\frac{1}{3}$, 亮起绿灯的概率为 $\frac{2}{3}$; 若第 n 次亮起的是绿灯, 则第 $n + 1$ 次亮起红灯的概率为 $\frac{2}{3}$, 亮起绿灯的概率为 $\frac{1}{3}$. 记第 n 次亮灯时, 亮起红灯的概率为 $P_n, n \in N^*$. 该玩具启动前可输入 P_1 , 玩具启动后, 当 $\frac{1010}{2021} < P_n < \frac{1}{2}$ 且第 n 次亮起红灯时, 该玩具会唱一首歌曲, 否则不唱歌.

(1) 若输入 $P_1 = \frac{1}{2}$, 记该玩具启动后, 前 3 次亮灯中亮起红灯的次数为 X , 求 X 的分布列和期望;

(2) 若输入 $P_1 = \frac{1}{3}$,

(i) 求数列 $\{P_n\}$ 的通项公式;

(ii) 该玩具启动后, 在前 20 次亮灯中, 该玩具最多唱几次歌?

22. (12分)

已知函数 $f(x) = \frac{1}{x} + b \ln x - a, g(x) = ae^{x-1} + \ln x - a, h(x) = f(x) - g(x)$.

(1) 求 $f(x)$ 的单调区间;

(2) 若 $b = 1$, 且 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 ,

证明: $h(x)$ 有唯一零点 (记为 x_0), 且 $x_1 + x_2 > 2x_0$.

数学参考答案及评分细则

评分说明：

1. 本解答给出了一种或几种解法供参考，如果考生的解法与本解答不同，可根据试题的主要考查内容比照评分标准制定相应的评分细则。

2. 对计算题，当考生的解答在某一步出现错误时，如果后继部分的解答未改变该题的内容和难度，可视影响的程度决定后继部分的给分，但不得超过该部分正确解答应给分数的一半；如果后继部分的解答有较严重的错误，就不再给分。

3. 解答右端所注分数，表示考生正确做到这一步应得的累加分数。

4. 只给整数分数。选择题和填空题不给中间分。

一、单项选择题：本大题共 8 小题，每小题 5 分，共 40 分，在每小题给出的四个选项中，只有一项是符合题目要求的。

1. D 2. B 3. B 4. A 5. C 6. D
7. C 8. D

二、多项选择题：本大题共 4 小题，每小题 5 分，共 20 分，在每小题给出的四个选项中，有多个选项符合题目要求，全部选对的得 5 分，选对但不全的得 2 分，有选错的得 0 分。

9. AB 10. BCD 11. AB 12. ACD

三、填空题：本大题共 4 题，每小题 5 分，共 20 分。

13. $x^2 - \frac{y^2}{3} = 1$ (答案不唯一) 14. 60
15. $3, \frac{\pi}{3}$ 16. $\frac{\sqrt{34}}{2}\pi$

四、解答题：本大题共 6 小题，共 70 分，解答应写出文字说明，证明过程或演算步骤。

17. 解：(1) 因为 $S_{n+1} - 3S_n = 1$ ，所以当 $n = 1$ 时， $S_2 - 3S_1 = a_1 + a_2 - 3a_1 = 1$ ，
又 $a_1 = 1$ ，所以 $a_2 = 3$ 1 分
因为 $S_{n+1} - 3S_n = 1$ ，
所以当 $n \geq 2$ 时， $S_n - 3S_{n-1} = 1$ ，两式相减得： $a_{n+1} - 3a_n = 0$ ，
所以 $a_{n+1} = 3a_n, n \geq 2$, 3 分
又 $a_2 = 3a_1$ ，所以 $a_{n+1} = 3a_n, n \in \mathbb{N}^*$ ， 4 分
所以数列 $\{a_n\}$ 是以 1 为首项，以 3 为公比的等比数列，所以 $a_n = 3^{n-1}$.
..... 5 分

(2) 由(1)得 $b_n = \log_3 a_n + 1 = \log_3 3^{n-1} + 1 = n$, 6分

所以 $\frac{1}{b_n \cdot b_{n+1}} = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}$, 8分

所以 $T_n = (1 - \frac{1}{2}) + (\frac{1}{2} - \frac{1}{3}) + \dots + (\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}) = 1 - \frac{1}{n+1} = \frac{n}{n+1}$.
..... 10分

18. 解: (1) 因为 $2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - \cos 2C$,
所以 $2 \sin^2 A - 2 \sin^2 B - \sin^2 C - 2 \sin B \sin C = \cos^2 C - (\cos^2 C - \sin^2 C) = \sin^2 C$,
..... 2分

所以 $\sin^2 B + \sin^2 C - \sin^2 A = -\sin B \sin C$,
所以由正弦定理, 得 $b^2 + c^2 - a^2 = -bc$, 3分

所以 $\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{-bc}{2bc} = -\frac{1}{2}$, 4分

因为 $A \in (0, \pi)$, 所以 $A = \frac{2\pi}{3}$ 6分

(2) 若选择 ①, 则 $\vec{AD} = \frac{1}{2}(\vec{AB} + \vec{AC})$, 7分

所以 $|\vec{AD}|^2 = \frac{1}{4}(\vec{AB}^2 + 2\vec{AB} \cdot \vec{AC} + \vec{AC}^2)$, 8分

因为 $AD = 2$,

所以 $4 = \frac{1}{4}[c^2 + 2cb \cdot (-\frac{1}{2}) + b^2]$, 9分

所以 $16 = (b+c)^2 - 3bc \geq (b+c)^2 - 3 \cdot (\frac{b+c}{2})^2 = \frac{(b+c)^2}{4}$,

即 $(b+c)^2 \leq 64$, 所以 $b+c \leq 8$, 11分

当且仅当 $b=c=4$ 时, $(b+c)_{\max} = 8$.

所以 $b+c$ 存在最大值, 所以原命题成立. 12分

若选择 ②, 则 $\angle BAD = \angle DAC = \frac{1}{2}A = \frac{\pi}{3}$,

因为 $S_{\triangle ABD} + S_{\triangle ADC} = S_{\triangle ABC}$, 7分

所以 $\frac{1}{2}AB \cdot AD \cdot \sin \frac{\pi}{3} + \frac{1}{2}AD \cdot AC \cdot \sin \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2}AB \cdot AC \cdot \sin \frac{2\pi}{3}$, 8分

因为 $AD = 2$,

所以 $\frac{1}{2}c \cdot 2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot 2 \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}c \cdot b \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$,

所以 $2c + 2b = bc$, 所以 $\frac{1}{b} + \frac{1}{c} = \frac{1}{2}$, 9分

所以 $b+c = 2(b+c)(\frac{1}{b} + \frac{1}{c}) = 2(1 + \frac{b}{c} + \frac{c}{b} + 1) \geq 2(2 + 2\sqrt{\frac{b}{c} \cdot \frac{c}{b}}) = 8$,
..... 11分

当且仅当 $b=c=4$ 时, $(b+c)_{\min} = 8$.

所以 $b + c$ 存在最小值, 所以原命题成立. 12 分

19. (1) 证明: 因为平面 $PAB \perp$ 底面 $ABCD$, 且平面 $PAB \cap$ 平面 $ABCD = AB$,

$BC \perp AB$, $BC \subset$ 平面 $ABCD$, 所以 $BC \perp$ 平面 ABP , 2 分

又 $BC \subset$ 平面 PBC , 所以平面 $PBC \perp$ 平面 PAB 4 分

(2) 解: 在平面 PAB 内, 过点 A 作 $AE \perp AB$ 交 PB 于点 E , 则可知 $AE \perp$ 平面 $ABCD$.

以 A 为坐标原点, 分别以 \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{AD} , \overrightarrow{AE} 方向为 x , y , z 轴的正方向, 建立空间直角坐标系 $A - xyz$, 5 分

则由 $\angle PAB = 120^\circ$, $PA = AD = AB = 1$, $BC = 2$,

可得 $P(-\frac{1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}}{2})$, $B(1, 0, 0)$, $C(1, 2, 0)$, $D(0, 1, 0)$,

则 $\overrightarrow{DP} = (-\frac{1}{2}, -1, \frac{\sqrt{3}}{2})$,

$\overrightarrow{DB} = (1, -1, 0)$,

$\overrightarrow{PB} = (\frac{3}{2}, 0, -\frac{\sqrt{3}}{2})$, 6 分

设 $\vec{n} = (x, y, z)$ 为平面 PBD 的法向量,

$$\text{则有} \begin{cases} \vec{n} \cdot \overrightarrow{DP} = 0 \\ \vec{n} \cdot \overrightarrow{DB} = 0 \end{cases}, \text{即} \begin{cases} -\frac{1}{2}x - y + \frac{\sqrt{3}}{2}z = 0 \\ x - y = 0 \end{cases}$$

取 $\vec{n} = (1, 1, \sqrt{3})$, 8 分

设 $\overrightarrow{PM} = \lambda \overrightarrow{PB} (0 \leq \lambda \leq 1)$, 则 $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AP} + \overrightarrow{PM} = (\frac{3\lambda - 1}{2}, 0, \frac{\sqrt{3}(1 - \lambda)}{2})$,

若直线 AM 与平面 PBD 所成角的正弦值为 $\frac{\sqrt{15}}{5}$,

$$\text{则} |\cos \langle \overrightarrow{AM}, \vec{n} \rangle| = \frac{|\overrightarrow{AM} \cdot \vec{n}|}{|\overrightarrow{AM}| |\vec{n}|} = \frac{1}{\sqrt{3\lambda^2 - 3\lambda + 1} \cdot \sqrt{5}} = \frac{\sqrt{15}}{5}, \text{ 10 分}$$

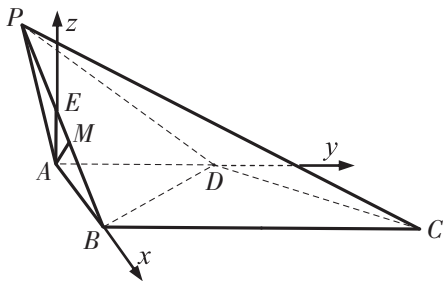
解得 $\lambda = \frac{1}{3}$ 或 $\lambda = \frac{2}{3}$, 11 分

故存在点 M 满足题意, 此时 $PM = \frac{\sqrt{3}}{3}$ 或 $PM = \frac{2\sqrt{3}}{3}$ 12 分

20. 解: (1) 因为以 F_1F_2 为直径的圆过点 $A(0, -b)$, 所以 $b = c$, 1 分

所以 $a = \sqrt{b^2 + c^2} = \sqrt{2}b$, 2 分

所以 $C: \frac{x^2}{2b^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, 因为 C 过点 $(\sqrt{2}, \sqrt{3})$, 所以 $\frac{2}{2b^2} + \frac{3}{b^2} = 1$,



解得 $b = 2$, $a = 2\sqrt{2}$, 4 分

所以椭圆 C 的方程为 $\frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1$ 5 分

(2) 由题意, 可设直线 l 的方程为 $y = kx + 1$, $M(x_1, y_1)$, $N(x_2, y_2)$,

由方程组 $\begin{cases} \frac{x^2}{8} + \frac{y^2}{4} = 1 \\ y = kx + 1 \end{cases}$, 消去 y 得 $(1 + 2k^2)x^2 + 4kx - 6 = 0$ 6 分

于是 $x_1 + x_2 = -\frac{4k}{1 + 2k^2}$, $x_1x_2 = \frac{-6}{1 + 2k^2}$, 8 分

因为 $A(0, -2)$, 所以 $k_1 = \frac{y_1 + 2}{x_1}$, $k_2 = \frac{y_2 + 2}{x_2}$, 9 分

于是 $k_1 \cdot k_2 = \frac{(y_1 + 2)(y_2 + 2)}{x_1x_2} = \frac{(kx_1 + 3)(kx_2 + 3)}{x_1x_2} = \frac{k^2x_1x_2 + 3k(x_1 + x_2) + 9}{x_1x_2}$
 $= k^2 + 2k^2 - \frac{9(1 + 2k^2)}{6} = -\frac{3}{2}$ 为定值. 12 分

21. 解: (1) 由题意, 得 X 的所有取值为 0, 1, 2, 3,

因为 $X = 0$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“绿绿绿”,

所以 $P(X = 0) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

因为 $X = 1$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红绿绿”或“绿红绿”或“绿绿红”,

所以 $P(X = 1) = \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} = \frac{4}{9}$.

因为 $X = 2$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红红绿”或“红绿红”或“绿红红”,

所以 $P(X = 2) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{2}{3} + \frac{1}{2} \times \frac{2}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{4}{9}$.

因为 $X = 3$ 表示前 3 次亮灯的颜色为“红红红”,

所以 $P(X = 3) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{18}$.

所以 X 的分布列为

X	0	1	2	3
p	$\frac{1}{18}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{4}{9}$	$\frac{1}{18}$

 4 分

所以 $E(X) = 0 \times \frac{1}{18} + 1 \times \frac{4}{9} + 2 \times \frac{4}{9} + 3 \times \frac{1}{18} = \frac{3}{2}$ 5 分

(2) (i) 由题意, 得 $P_{n+1} = P_n \times \frac{1}{3} + (1 - P_n) \times \frac{2}{3} = -\frac{1}{3}P_n + \frac{2}{3}$, 6 分

所以 $P_{n+1} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{3}(P_n - \frac{1}{2})$, 7 分

因为 $P_1 = \frac{1}{3}$, 所以 $P_1 - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \neq 0$, 8分

所以 $\{P_n - \frac{1}{2}\}$ 是首项为 $-\frac{1}{6}$, 公比为 $-\frac{1}{3}$ 的等比数列,

所以 $P_n - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6} \times (-\frac{1}{3})^{n-1}$, 所以 $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n$

..... 9分

(ii) 由 $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n < \frac{1}{2}$, 得 $\frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n < 0$, 又 $n \in N^*$, 所以

n 为正奇数,

由 $P_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times (-\frac{1}{3})^n > \frac{1010}{2021}$, 得 $(-\frac{1}{3})^n > -\frac{1}{2021}$,

当 n 为奇数时, $\frac{1}{3^n} < \frac{1}{2021}$, $3^n > 2021$, 所以 $n \geq 7$, 11分

所以该玩具启动后, 在前20次亮灯中, 当 $n=7, 9, 11, 13, 15, 17, 19$ 时, 该玩具可能唱歌, 所以该玩具启动后, 在前20次亮灯中, 该玩具最多唱7次歌. 12分

22. 解: (1) $f(x)$ 的定义域为 $(0, +\infty)$, $f'(x) = -\frac{1}{x^2} + \frac{b}{x} = \frac{-1+bx}{x^2}$ 1分

① 若 $b \leq 0$, 则 $f'(x) < 0$, 所以 $f(x)$ 的递减区间为 $(0, +\infty)$, 无递增区间. 2分

② 若 $b > 0$, 则由 $f'(x) < 0$, 得 $0 < x < \frac{1}{b}$, 由 $f'(x) > 0$, 得 $x > \frac{1}{b}$,

所以 $f(x)$ 的递减区间为 $(0, \frac{1}{b})$, 递增区间为 $(\frac{1}{b}, +\infty)$ 4分

(2) 因为 $b=1$, 所以由(1)知 $f(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 在 $(1, +\infty)$ 上递增,

因为 $f(x)$ 有两个不同的零点 x_1, x_2 , 不妨设 $x_1 < x_2$,

所以 $0 < x_1 < 1 < x_2$, 且 $f(1) = 1 - a < 0$,

所以 $a > 1$, 5分

又 $h(x) = \frac{1}{x} - ae^{x-1}$, $x > 0$,

因为当 $x > 0$ 时, $h'(x) = -\frac{1}{x^2} - ae^{x-1} < 0$,

所以 $h(x)$ 在 $(0, +\infty)$ 上是减函数, 6分

又因为 $h(\frac{1}{a}) = a - ae^{\frac{1}{a}-1} = a(1 - e^{\frac{1}{a}-1}) > 0$, $h(1) = 1 - a < 0$, $h(x)$ 的图象

连续不断,

所以 $h(x)$ 有唯一零点 x_0 , 且 $\frac{1}{a} < x_0 < 1$ 7 分

所以 $2x_0 < 2$,

要证明 $x_1 + x_2 > 2x_0$,

只需证明 $x_1 + x_2 > 2$, 8 分

只需证明 $x_2 > 2 - x_1$,

因为 $f(x)$ 在 $(1, +\infty)$ 上递增, $x_2, 2 - x_1 \in (1, +\infty)$,

所以只需证明 $f(x_2) > f(2 - x_1)$, 9 分

因为 $f(x_1) = f(x_2) = 0$,

所以只需证明 $f(x_1) > f(2 - x_1)$,

只需证明 $f(x_1) - f(2 - x_1) > 0$,

令 $\varphi(x) = f(x) - f(2 - x)$,

只需证明 $\varphi(x_1) > 0 = \varphi(1)$,

只需证明 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减, 10 分

因为 $f'(x) = \frac{x-1}{x^2}$,

所以当 $0 < x < 1$ 时, $\varphi'(x) = f'(x) + f'(2-x) = -\frac{4(x-1)^2}{x^2(x-2)^2} < 0$,

..... 11 分

所以 $\varphi(x)$ 在 $(0, 1)$ 上递减,

所以 $x_1 + x_2 > 2x_0$ 12 分