以“牛顿法”为背景的高考试题赏析

362100　福建省惠安高级中学　杨苍洲　陈佳聪

1　问题的提出

《普通高中课程标准实验教科书数学选修2-2》人教A版. 第1.2节“探究与发现”:牛顿法——用导数方法求方程的近似解:人们很早以前就开始探索高次方程的数值求解问题. 牛顿(Issac Newton,1642-1727)在《流数法》一书中,给出了高次代数方程的一种数值解法——牛顿法. 这种求方程根的方法,在科学界已被广泛采用. ……

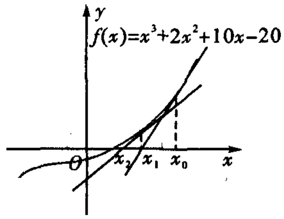

图1

牛顿法用“作切线”的方法找到一系列的切线以及它们与x轴的一系列交点$x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n$,并推导出求方程根的牛顿法公式:如果$f'(x_{n-1})\neq 0$,那么$x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$. 对于给定的精确度,我们可以根据上述公式求出方程的近似解.

显然,牛顿法的公式$x_n=x_{n-1}-\dfrac{f(x_{n-1})}{f'(x_{n-1})}$中给出了$x_n$,$x_{n-1}$的递推关系,因此,以此方法为背景命制导数与数列交汇的试题显得非常自然、和谐,新而不难,能突出知识之间的交叉、渗透和综合,体现综合性,能充分检验学生对所学知识的综合应用程度. 下面笔者就高考试题以及自己编制的几个试题与大家共赏此类试题的精彩.

2　考题赏析

在近年的试题中以“牛顿法”为背景的试题开始崭露头角,且屡有新意.

例1　(2011年陕西)如图2,从点$P_1(0,0)$作x轴的垂线交曲线$y=e^x$于点$Q_1(0,1)$,曲线在Q_1点处的切线与x轴交于点P_2,再从P_2作x轴的垂线交曲线于点Q_2,依次重复上述过程得到一系列点:$P_1,Q_1,P_2,Q_2,\cdots,P_n,Q_n$,记$P_k$点的坐标为$(x_k,0)(k=1,2,\cdots,n)$.

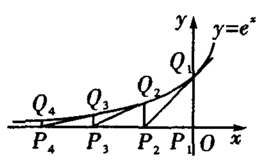

图2

(Ⅰ)试求x_1与x_{k-1}的关系$(2\leqslant k\leqslant n)$;

(Ⅱ)求$|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\cdots+|P_nQ_n|$.

解　(Ⅰ)设$P_{k-1}(x_{k-1},0)$,由$y'=e^x$得:曲线在$Q_{k-1}(x_{k-1},e^{x_{k-1}})$点处的切线斜率为$e^{x_{k-1}}$,所以切线方程为$y-e^{x_{k-1}}=e^{x_{k-1}}(x-x_{k-1})$,令$y=0$得$x_k=x_{k-1}-1(2\leqslant k\leqslant n)$;

(Ⅱ)因为$x_1=0$,$x_k-x_{k-1}=-1$,得$x_k=-(k-1)$,$|P_kQ_k|=e^{x_k}=e^{-(k-1)}$,$S_n=|P_1Q_1|+|P_2Q_2|+|P_3Q_3|+\cdots+|P_nQ_n|=1+e^{-1}+e^{-2}+\cdots+e^{-(n-1)}=\dfrac{1-e^{-n}}{1-e^{-1}}=\dfrac{e-e^{1-n}}{e-1}$.

例2　如图3,已知曲线C:$y=\dfrac{1}{x}$在点$P(1,1)$处的切线与x轴交于点Q_1,过点Q_1作x轴的垂线交曲线C于点P_1,曲线C在点P_1处的切线与x轴交于点Q_2,过点Q_2作x轴的垂线交曲线C于点P_2,…,依次得到一系列点$P_1,P_2,\cdots,P_n$,设点P_n的坐标为$(x_n,y_n)$$(n\in\mathbf{N}^*)$.

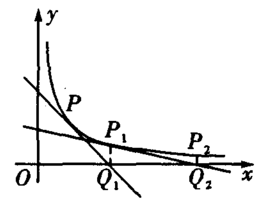

图3

(Ⅰ)求数列$\{x_n\}$的通项公式;

(Ⅱ)求证:三角形$P_nP_{n+1}P_{n+2}$的面积为定值.

解　(Ⅰ)由$y=\dfrac{1}{x}$求导得$y'=-\dfrac{1}{x^2}$,所以曲线$C:y=\dfrac{1}{x}$在点$P(1,1)$处的切线方程为$y-1=-(x-1)$,即$y=-x+2$. 此切线与x轴的交点Q_1的坐标为$(2,0)$,所以点P_1的坐标为$\left(2,\dfrac{1}{2}\right)$. 即$x_1=2$,$y_1=\dfrac{1}{2}$. 因为点$P_n$的坐标为$(x_n,y_n)$$(n\in\mathbf{N}^*)$,$P_n$在曲线$C$上,所以$y_n=\dfrac{1}{x_n}$,所以曲线$C:y=\dfrac{1}{x}$在点$P_n(x_n,y_n)$处的切线方程为$y-\dfrac{1}{x_n}=-\dfrac{1}{x_n^2}(x-x_n)$,令$y=0$,得点$Q_{n+1}$的横坐标为$x_{n+1}=2x_n$.

所以数列$\{x_n\}$是以2为首项,2为公比的等比数列,所以$x_n=2^n(n\in\mathbf{N}^*)$.

(Ⅱ)设$P_n(x_n,y_n)$,$P_{n+1}(x_{n+1},y_{n+1})$,$P_{n+2}(x_{n+2},y_{n+2})$,

因为$S_{P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}}=\dfrac{1}{2}(\dfrac{1}{2^n}+\dfrac{1}{2^{n+1}})(2^{n+1}-2^n)$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2^{n+1}}\times 2^n=\frac{3}{4},$$

$$S_{P_{n+1}Q_{n+1}Q_{n+2}P_{n+2}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2^{n+1}}+\frac{1}{2^{n+2}})(2^{n+2}-2^{n+1})$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{3}{2^{n+2}}\times 2^{n+1}=\frac{3}{4},$$

$$S_{P_nQ_nQ_{n+2}P_{n+2}}=\frac{1}{2}(\frac{1}{2^n}+\frac{1}{2^{n+2}})(2^{n+2}-2^n)$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5}{2^{n+2}}\times3\times2^n=\frac{15}{8},$$

所以 $S_{\triangle P_nP_{n+1}P_{n+2}}=S_{P_nQ_nQ_{n+2}P_{n+2}}-S_{P_nQ_nQ_{n+1}P_{n+1}}-S_{P_{n+1}Q_{n+1}Q_{n+2}P_{n+2}}=\frac{15}{8}-\frac{3}{4}-\frac{3}{4}=\frac{3}{8}$(定值).

上述两个例题都是函数导数、直线方程、数列交汇的题型,题目的设计环环相扣,它从求曲线的切线入手,考查导数的几何意义、直线的方程、函数的零点、等差数列的定义、数列的递推公式、数列求和等知识点,问题的设计横跨函数导数、解析几何、数列三大知识版块,实现了知识的交汇创新,简约而不简单.

3 新编练习

例3 (2010年福建改编)已知函数 $f(x)=ax^3+bx$,其图象记为曲线 C,曲线 C 在 $P_1(1,f(1))$ 的切线方程为 $y=2x-2$.

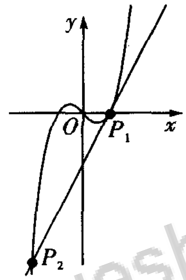

图4

(Ⅰ)求 a,b 的值;

(Ⅱ)若曲线 C 与其在点 $P_1(1,f(1))$ 处的切线交于另一点 $P_2(x_2,f(x_2))$,线段 P_1P_2 与曲线 C 所围成封闭图形的面积分别记为 S_1,求 S_1 的值;

(Ⅲ)若按(Ⅱ)的方法依次做下去,即:若曲线 C 与其在点 $P_n(x_n,f(x_n))$ 处的切线交于另一点 $P_{n+1}(x_{n+1},f(x_{n+1}))$,曲线 C 与其在点 $P_{n+1}(x_{n+1},f(x_{n+1}))$ 处的切线交于另一点 $P_{n+2}(x_{n+2},f(x_{n+2}))$,线段 P_nP_{n+1},$P_{n+1}P_{n+2}$ 与曲线 C 所围成封闭图形的面积分别记为 S_n,S_{n+1},证明 $\frac{S_n}{S_{n+1}}$ 为定值,并求 S_n.

解 (Ⅰ)因为 $f'(x)=3ax^2+b$,又因为 $f(1)=0$,$f'(1)=2$,所以 $a+b=0$,$3a+b=2$,所以 $a=1$,$b=-1$.

(Ⅱ)因为 $f(x)=x^3-x$,由 $\begin{cases}y=2x-2,\\y=x^3-x,\end{cases}$ 得 $x^3-3x+2=0$,所以 $x=1$ 或 $x=-2$,故 $x_2=-2$,进而有

$$S_1=\left|\int_{-2}^{1}((x^3-x)-(2x-2))\,dx\right|$$
$$=\left|\int_{-2}^{1}(x^3-3x+2)\,dx\right|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x^2+2x\right)\Big|_{-2}^{1}\right|=\frac{27}{4}.$$

(Ⅲ)因为 $f'(x)=3x^2-1$,$P_n(x_n,x_n^3-x_n)$,

因为 $f'(x_n)=3x_n^2-1$,因此过点 P_1 的切线方程为

$$y=(3x_n^2-1)(x-x_n)+x_n^3-x_n,$$

即 $y=(3x_n^2-1)x-2x_n^3$,由 $\begin{cases}y=(3x_n^2-1)x-2x_n^3,\\y=x^3-x,\end{cases}$ 得

$x^3-x=(3x_n^2-1)x-2x_n^3$,所以 $x=x_n$ 或 $x=-2x_n$,

故 $x_{n+1}=-2x_n$,进而有

$$S_n=\left|\int_{x_n}^{-2x_n}(x^3-3x_n^2x+2x_n^3)\,dx\right|$$
$$=\left|\left(\frac{1}{4}x^4-\frac{3}{2}x_n^2x^2+2x_n^3x\right)\Big|_{x_n}^{-2x_n}\right|=\frac{27}{4}x_n^4.$$

用 x_{n+1} 代替 x_n,重复上面的计算,可得 $x_{n+2}=-2x_{n+1}$ 和 $S_{n+1}=\frac{27}{4}x_{n+1}^4$,又因为 $x_{n+1}=-2x_n\neq0$,所以 $\frac{S_n}{S_{n+1}}=\frac{\frac{27}{4}x_n^4}{\frac{27}{4}x_{n+1}^4}=\frac{1}{16}$.

又 $S_1=\frac{27}{4}$,所以 $S_n=\left(\frac{27}{4}\right)\cdot\left(\frac{1}{16}\right)^{n-1}=27\cdot2^{-4n+2}$.

例4 (2011年泉州市质检改编)已知双曲正弦函数 $\mathrm{sh}x=\frac{e^x-e^{-x}}{2}$ 和双曲余弦函数 $\mathrm{ch}x=\frac{e^x+e^{-x}}{2}$ 与正弦函数 $\sin x$ 和余弦函数 $\cos x$ 有类似的性质.

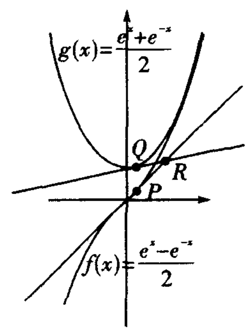

图5

(Ⅰ)已知 $(\sin x)'=\cos x$、$(\cos x)'=-\sin x$,类比这一结论,写出双曲正弦函数和双曲余弦函数所具有的结论;

(Ⅱ)设 $f(x)=\mathrm{sh}x$,$g(x)=\mathrm{ch}x$,分别过 $P_1(1,f(1))$,$Q_1(1,g(1))$ 作函数 $f(x)$,$g(x)$ 的切线 p_1,q_1,直线 p_1,q_1 相交于点 R_1;再过点 R_1 作 x 轴的垂线 l_1,l_1 分别交函数 $f(x)$,$g(x)$ 于 P_2,Q_2,分别过 P_2,Q_2 作函数 $f(x)$,$g(x)$ 的切线 p_2,q_2,直线 p_2,q_2 相交于点 R_2……;如此依次作下去,得到一系列交点 $R_1,R_2,\cdots,R_n(n\in\mathbf{N}^*)$,求点 R_n 的横坐标 x_n.

解 (Ⅰ)$(\mathrm{sh}x)'=\mathrm{ch}x$,$(\mathrm{ch}x)'=\mathrm{sh}x$;

(Ⅱ)因为 $P_1(1,\mathrm{sh}1)$,$Q_1(1,\mathrm{ch}1)$,所以切线 p_1,q_1 的斜率分别为 $\mathrm{ch}1$,$\mathrm{sh}1$,

所以切线 $p_1:y=\mathrm{ch}1(x-1)+\mathrm{sh}1$,$q_1:y=\mathrm{sh}1(x-1)+\mathrm{ch}1$,

由 $\begin{cases}y=\mathrm{ch}1(x-1)+\mathrm{sh}1,\\y=\mathrm{sh}1(x-1)+\mathrm{ch}1,\end{cases}$ 得 $x=2$,所以 $x_1=2$,

又因为 $P_n(x_{n-1},\mathrm{sh}x_{n-1})$,$Q_n(x_{n-1},\mathrm{ch}x_{n-1})$,所以切线 p_n,q_n 的斜率分别为 $\mathrm{ch}x_{n-1}$,$\mathrm{sh}x_{n-1}$,

所以切线 $p_n:y=\mathrm{ch}x_{n-1}(x-x_{n-1})+\mathrm{sh}x_{n-1}$,$q_n:y=\mathrm{sh}x_{n-1}(x-x_{n-1})+\mathrm{ch}x_{n-1}$,由 $\begin{cases}y=\mathrm{ch}x_{n-1}(x-x_{n-1})+\mathrm{sh}x_{n-1},\\y=\mathrm{sh}x_{n-1}(x-x_{n-1})+\mathrm{ch}x_{n-1},\end{cases}$

得 $x=x_{n-1}+1$,$\therefore x_n=x_{n-1}+1$,$\therefore\{x_n\}$ 是以 $x_1=2$ 为首项,公差为1的等差数列,$\therefore x_n=n+1$.

(收稿日期:20110710)